Nachtrag zur Diplomarbeit

Dieser Nachtrag widmet sich der Frage, wie viele planare $(0, \lambda)$-Graphen es eigentlich gibt. Dies wurde in der Diplomarbeit nicht abschließend geklärt. Satz 21 weist lediglich darauf hin, dass es nicht viele sein können. Im Zentrum der folgenden Analyse steht dabei die

Eulersche Polyederformel (vgl. [Die06], Satz 3.2.9): Seien $G = (V, E)$ ein planarer Graph und F die Menge der Gebiete einer ebenen Einbettung von G. Dann gilt

$$|V| - |E| + |F| = 2. \tag{1}$$

Für einen d-regulären planaren Graphen, $d \geq 2$, vereinfacht sich diese Formel weiter:[1] Für ein Gebiet $f \in F$ einer Einbettung von G sei $|f|$ die Anzahl der Kanten, die f beranden. Wir zählen die Kanten von G auf zwei Arten ab:

$$2 \cdot |E| = |V| \cdot d = \sum_{f \in F} |f| \geq |F| \cdot m,$$

wobei $m := \min_{f \in F} |f|$ ist. Mit Gleichung 1 folgt dann

$$|V| \cdot \left(1 - \frac{d}{2} + \frac{d}{m}\right) \geq 2.$$

Wegen $m \geq 3$ gilt daher

$$|V| \cdot (6 - d) \geq 12. \tag{2}$$

Für Graphen mit $m \geq 4$ (dreiecksfreie Graphen) gilt sogar

$$|V| \cdot (4 - d) \geq 8. \tag{3}$$

Sei G ein $(0, \lambda)$-Graph mit Parameter λ und Grad d. Gemäß Satz 10 können wir $|V|$ in Abhängigkeit von d und λ nach oben beschränken. Enthält G ein Dreieck, so folgt $\chi(G) \geq 3$ und wir können die oberen Schranken nach Folgerung 27 sogar halbieren. Wie bereits im Beweis von Satz 21 für den Fall $\lambda \geq 6$ angedeutet, gilt $d \geq \lambda$ (vorausgesetzt $d \geq 2$).

Die linke Tabelle enthält die oberen Schranken für $|V|$ in Abhängigkeit von $d, \lambda \in \{2, 3, 4, 5\}$ (gemäß Satz 10), die rechte Tabelle für $|V|$, falls G ein Dreieck enthält (gemäß Satz 10 und Folgerung 27).

[1] Ohne Einschränkung betrachten wir nur „nichttriviale“ planare $(0, \lambda)$-Graphen, das heißt planare $(0, \lambda)$-Graphen mit Grad mindestens 2.

$d \setminus \lambda$	2	3	4	5
2	4	-	-	-
3	8	6	-	-
4	16	10	8	-
5	32	16	12	10

$d \setminus \lambda$	2	3	4	5
2	2	-	-	-
3	4	3	-	-
4	8	5	4	-
5	16	8	6	5

Abbildung 1: Obere Schranken für $|V|$ in Abhängigkeit von d und λ

Theorem 1: Sei G ein dreiecksfreier nichttrivialer planarer $(0, \lambda)$-Graph. Dann ist G der Würfelgraph Q_2 oder der Würfelgraph Q_3.

Beweis: Wegen Ungleichung 3 gilt $d = 2$ (dann $|V| \geq 4$) oder $d = 3$ (dann $|V| \geq 8$). Dies liefert $\lambda = 2$ (vgl. Tabelle 1(a)). In beiden Fällen nimmt $|V|$ den Wert der gemäß Satz 10 oberen Schranke an. Dies ist genau dann der Fall, wenn G ein Würfelgraph ist (vgl. [Mul80], Proposition 2.2.2) und es folgt die Behauptung. ■

Theorem 2: Sei G ein nichttrivialer planarer $(0, \lambda)$-Graph, der ein Dreieck enthält. Dann ist G eine Triangulation.

Beweis: Wegen Ungleichung 2 gilt $d = 2$ (dann $|V| \geq 3$), $d = 3$ (dann $|V| \geq 4$), $d = 4$ (dann $|V| \geq 6$) oder $d = 5$ (dann $|V| \geq 12$). Dies liefert $\lambda = 2$ (vgl. Tabelle 1(b)).

Sei x ein Knoten, der an einem Dreieck beteiligt ist. Wegen Folgerung 6 enthält die Nachbarschaft von x einen Kreis der Länge 3 oder 5. Seien u, v und w drei aufeinanderfolgende Knoten dieses Kreises. Wir nehmen an, es gibt einen Nachbarn y von x, der nicht auf diesem Kreis liegt, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch.[2] Dieser ist wegen Folgerung 6 weder Nachbar von u noch von v noch von w. Nach Satz 7, angewendet auf die benachbarten Knoten x und y, besitzt y Nachbarn u', v' und w', die jeweils zu u beziehungsweise v beziehungsweise w benachbart sind. Die Knoten u, v, w, u', v' und w' sind paarweise verschieden.

Sei H der Graph auf den Knoten x, u, v, w, y, u', v' und w', der alle bisher diskutierten Nachbarschaftsbeziehungen darstellt. Betrachten wir die Partition $(V_1, \ldots, V_5)$ von $V(H)$ mit $V_1 = \{x\}$, $V_2 = \{u\}$, $V_3 = \{v\}$, $V_4 = \{w\}$ und $V_5 = \{y, u', v', w'\}$, so stellen wir fest, dass $H \in \mathcal{M}K_5$ gilt (vgl. Definition 17). Demzufolge ist H nicht planar und Gleiches gilt für G.

[2] Wegen $d \leq 5$ bilden u, v und w dann einen Kreis der Länge 3.

Daher liegen alle Nachbarn von x auf einem Kreis. Da alle Nachbarn von x wieder an einem Dreieck beteiligt sind, gilt diese Aussage auch für alle Nachbarn von x. Der Zusammenhang von G überträgt die Aussage auf alle Knoten von G. Damit ist G insbesondere eine Triangulation. ■

Theorem 3: Sei G ein nichttrivialer planarer $(0, \lambda)$-Graph, der ein Dreieck enthält. Dann ist G der Tetraedergraph oder der Ikosaedergraph.

Beweis: Wegen Theorem 2 ist G eine Triangulation und wegen [BM97] ist die Zusammenhangszahl von G gleich seinem Grad, das heißt G ist mindestens 3-fach-zusammenhängend. Nach Steinitz's Theorem (vgl. [Grü03]) ist G der Kantengraph eines konvexen (3-dimensionalen) Polyeders P. Da alle Seitenflächen von P Dreiecke sind und G d-regulär ist, das heißt in jeder Ecke von P berühren sich d Flächen, ist P ein reguläres konvexes Polyeder, also ein Tetraeder oder ein Ikosaeder. ■

Zusammenfassung: Es gibt keine nichttrivialen planaren $(0, \lambda)$-Graphen für $\lambda \geq 3$. Die nichttrivialen planaren $(0, 2)$-Graphen sind die Würfelgraphen Q_2 und Q_3 sowie der Tetraedergraph und der Ikosaedergraph (siehe Abbildung am Ende von Kapitel 3 der Diplomarbeit).

Danksagung: Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Dr. Göring bedanken, der auch zu diesem Nachtrag viele gute Ideen beigesteuert hat.

Literatur

[BM97] A. E. Brouwer, H.M. Mulder. The vertex connectivity of a $\{0, 2\}$-graph equals its degree. *Discrete Mathematics 169*, 153-155, 1997

[Die06] R. Diestel. *Graphentheorie* (Elektronische Ausgabe 2006). Springer-Verlag Heidelberg 1996, 2000, 2006

[Grü03] B. Grünbaum. *Convex Polytopes* (2003). Springer-Verlag New York 2003

[Mul80] H. M. Mulder. The interval function of a graph. *Mathematical Centre Tracts 132*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980